一般的固有値問題のためのアルゴリズム (数値計算のアルゴリズムとコンピューター)

戸川, 隼人

数理解析研究所講究録
339巻 1978年 70-73

一般的固有値問題のためのアルゴリズム

日大 理工 戸川 隼人

問題1 与えられた正定値対称行列M，C，Kに対し

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

を満たす固有値λ，固有ベクトル$\mathbf{u}$を求める．

問題2 $(\lambda^2 M + K)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ についての同様な問題。
（1で$C=0$の場合に相当）．

これらの問題に対し，各種の解法が提案されているが，ここでは，Householder変換により，上記のM，C，Kが，5重対角化（問題2の場合）または7重対角化（問題1の場合）できることを示す．このような前処理をしておけば，Guptaの方法[注1)]などの計算時間は大幅に短縮できる．またQR法に接続することも考えられる．

〈記号〉 細字体の小文字はスカラー．太字体の小文字は列ベクトル．^{T}は転置記号

大文字は行列（$n \times n$）

注1 K.K. Gupta; Recent Advances in Numerical Analysis of Structural Eigenvalue Problems. in "Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis" Univ. Tokyo Press

問題２の５重対角化の具体的手順（$k=1,2,\cdots,n-3$ の順に）

$$s=\sqrt{\sum_{j=k+1}^{n} m_{kj}^2}$$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{但し} \quad x_i=\begin{cases} 0 & i \leqq k \\ m_{ik}-s & i=k+1 \\ m_{ik} & i \geqq k+2 \end{cases}$$

$$c_1=\mathbf{x}^T\mathbf{x} \qquad c_2=2/c_1$$

$$\mathbf{w}=c_2 M\mathbf{x}$$

$$c_3=(1/c_1)\,\mathbf{x}^T\mathbf{w}$$

$$\mathbf{v}=\mathbf{w}-c_3\mathbf{x}$$

$$\text{新}M=M-\mathbf{x}\mathbf{v}^T-\mathbf{v}\mathbf{x}^T$$

$$\mathbf{w}=c_2 K\mathbf{x}$$

$$c_3=(1/c_1)\,\mathbf{x}^T\mathbf{w}$$

$$\mathbf{v}=\mathbf{w}-c_3\mathbf{x}$$

$$\text{新}K=K-\mathbf{x}\mathbf{v}^T-\mathbf{v}\mathbf{x}^T$$

$$\mathbf{g}=c_2 T\mathbf{x}$$

$$\text{新}T=T-\mathbf{g}\mathbf{x}^T$$

$$s=\sqrt{\sum_{j=k+2}^{n} k_{kj}^2}$$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{但し} \quad x_i=\begin{cases} 0 & (i \leqq k+1) \\ k_{ik}-s & (i=k+2) \\ k_{ik} & (i \geqq k+3) \end{cases}$$

$$c_1 = x^T x \qquad c_2 = 2 / c_1$$

$$w = c_2 M x$$

$$c_3 = (1 / c_1)\, x^T w$$

$$v = w - c_3 x$$

$$新 M = M - x v^T - v x^T$$

$$w = c_2 K x$$

$$c_3 = (1 / c_1)\, x^T w$$

$$v = w - c_3 x$$

$$新 K = K - x v^T - v x^T$$

$$g = c_2 T x$$

$$新 T = T - g x^T$$

—— 別案（Givens流の変換法）——

$\ell = 1, 2, \cdots, n-3$ の順に

 $k = \ell+3, \ell+4, \cdots, n$ の順に

  $新 M = P_{k\ell}\, M\, P_{k\ell}^T$

  $新 K = P_{k\ell}\, K\, P_{k\ell}^T$

但し

$$P_{k\ell} = \left[\begin{array}{c|ccccc} I & & & 0 & & \\ \hline & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \alpha_k & \beta_k & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow 第\ell行 \\ \\ \leftarrow 第k行 \\ \\ \\ \end{array}$$

ただし α_k, β_k は次式によって求める.

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_{l+1,l} & m_{l+2,l} \\ k_{l+1,l} & k_{l+2,l} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -m_{kl} & m_{l+2,l} \\ -k_{kl} & k_{l+2,l} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} m_{l+1,l} & -m_{kl} \\ k_{l+1,l} & -k_{kl} \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \Delta_1 / \Delta \qquad \beta = \Delta_2 / \Delta$$

問題1の7重対角化も同じ要領でできる.

(おわびと訂正) 研究集会当日, 算法 I として発表した方法には誤りがありました. つつしんでおわび申しあげ, 取り下げさせていただきます.